桑森　啓・玉村千治編『アジア国際産業連関表の作成―課題と拡張―　中間報告書』
調査研究報告書　アジア経済研究所　2016 年

第 3 章

各国産業連関表の延長推計の方法

佐野　敬夫

要約：

産業連関表の延長推計について、必要となる作業、手法、存在するコンピュータ・プログラムについて述べている。

まず、延長推計作業において必要な作業を概観した後、2005 年産業連関表の延長表推計作業に関して、中国、台湾、シンガポールを取り上げ、それらの国で行われた作業について確認する。次に、産業連関表の中間取引部分の延長推計方法を検討する。また、これらの方法のパフォーマンスを比較して、広く用いられている RAS 法が最も優れている可能性を指摘する。最後に、現実の延長作業を考慮して設計されたアジア経済研究所の拡張 RAS 法について、コンピュータ・プログラムの機能から検討する。

キーワード：

産業連関表の延長推計、コントロール・トータル、RAS 法、平均増加倍率法、ラグランジュ未定係数法、拡張 RAS 法

はじめに

国際産業連関表の作成のためには、その国際産業連関表に組み込まれるすべての国（対象国）の対象年の産業連関表が揃っている必要がある。もし、対象国の中でその対象年の産業連関表が存在しない場合には、それを作成する必要がある。その場合に、一般的にその国の基本となる産業連関表の構造を利用して、対象年の必要データを可能な限り収集してその対象年の産業連関表を推計することになる。この作業を産業連関表の延長推計作業と呼んでいる。国際産業連関表の作成にはさまざまな作業が必要となるが、各国産業連関表の延長推計作業は最も労力を要する作業のひとつである。たとえば、2005 年アジア国際産業連関表の作成に際しては、中国、フィリピン、台湾、

シンガポール、米国と対象国の半数について 2005 年産業連関表の延長推計が必要になった。

本稿では一国の産業連関表の延長推計について、どのような作業が必要となるのか、どのような手法が存在するのか、実際にどのようなコンピュータ・プログラムを準備したのかなどについての説明を行う。

第 1 節では、一国産業連関表の延長推計の標準的な作業について述べ、アジア各国の中から、中国、台湾、シンガポールを取り上げ、2005 年産業連関表の延長表推計作業で何がどのように行われたのかを確認する。

第 2 節では、産業連関表の中の中間取引部分の推計方法について述べる。この作業は産業連関表の延長推計作業の中で最も困難な部分であるが、多くの機械的な計算による推計方法が既に存在している。この節ではそれらの方法について説明するとともにそれぞれの方法の比較を行う。また数値例を用いて各推計方法のパフォーマンスの評価を行う。

第 3 節では、拡張 RAS 法について述べる。これは第 2 節で取り上げた方法のひとつである RAS 法を、アジア国際産業連関表の作成における現実の作業を考慮して改良したものである。これはアジア経済研究所で従来から使用してきたコンピュータ・プログラムに体現されているので、ここではそのプログラムの機能を中心にみていくことにする。

第 1 節　一国産業連関表の延長推計

多くのアジアの国々では 5 年毎にその国の産業連関表を作成している。それを一般的に基本表（あるいはベンチマーク表）と呼んでいる。目的により、基本表が対象とする年次の間の年次の産業連関表が必要になる場合があるが、その場合には、その年次の産業連関表に関するデータをできるだけ収集し、基本表の構造を参照しながら、対象年次の産業連関表を推計することになる。その作業を産業連関表の延長推計作業と呼んでいる。

このたび、アジア経済研究所では 2005 年アジア国際産業連関表が完成したが、この表を作成するためには、内生 10 カ国の 2005 年産業連関表が必要になった。しかし、内生国の中で、中国、台湾、フィリピン、シンガポール、米国の 5 カ国は 2005 年の産業連関表を持たなかったため、これらの国については 2005 年産業連関表の延長推計を行った。

そこで、この節では一国の産業連関表の延長推計作業の大まかな流れと、どのような作業が必要となるのかについて説明を行う。なお、ここでは中国、台湾、シンガポ

ールの延長推計作業について触れるが、それらは IDE-JETRO［2012］からの情報に基づいている。また、日本の産業連関表の延長推計作業については、経済産業省大臣官房調査統計グループ［2013］（以下、経産省［2013］と略記）を参照した。

2005 年アジア国際産業連関表の作成においては、中国では国家情報センターが 2005 年延長産業連関表（内生 133 部門）を作成したが、これは国家統計局で作成された 2002 年産業連関表（基本表、内生 122 部門）が基礎になっている。ただし、同じく国家統計局が作成した部門数の少ない 2005 年延長産業連関表（内生 42 部門）が存在するので、この表の数字と整合的になるように 2005 年表の延長推計が行われた。台湾では台湾綜合研究院が 2005 年産業連関表（内生 161 部門）の延長推計作業を行ったが、これは台湾の行政院主計處が作成した 2004 年産業連関表（内生 161 部門）が基本表となっている。しかし、この 2004 年産業連関表自体が行政院主計處が作成した 2001 年産業連関表（基本表、内生 612 部門）の延長表になっている。また、シンガポールではビジネス・リサーチ・コンサルタンツ社がシンガポールの国家統計局作成の 2000 年産業連関表（基本表、内生 152 部門）を基本表として、2005 年産業連関表（内生 155 部門）を延長推計している。

1. 産業連関表延長推計の手順

産業連関表の一般的な形は図 3.1 のとおりである。輸入品と国産品を全く区別せず扱うのが競争輸入型表であり、それらを区別して扱うのが非競争輸入型表であるが、延長推計の手順はいずれの表についてもほとんど同じであるため、ここでは競争輸入型表に基づいて説明を進める。

図 3.1　一国の産業連関表

（出所）筆者作成。

また、ここでは最もきめ細かな産業連関表の延長推計作業がなされていると思われる日本での作業を参照することとする。経産省［2013］には、産業連関表の延長推計作業として次の 10 段階が掲げられている。

(1) データ収集

対象年次の産業連関表の延長推計のために必要なデータを収集し、以下の作業に使用する。

(2) 国内生産額推計

図 3.1 の①の部分（2 カ所あり同じ数字が入る）の推計である。表の最下行にある国内生産額は総投入とも呼ばれ、表の最も右の列にある国内生産額は総産出とも呼ばれる（本稿では、これら 2 つのうちの用語を、場合に応じて使い分けることとする)。

(3) 輸出入額推計

図 3.1 の②と③の推計である。

(4) 国内総供給額推計

上の(2)と(3)で得られた数字から、①＋③－②として得られる。アジア諸国の延長推計には、この数字は使用されていない。

(5) 国内最終需要額推計

図 3.1 の④の部分の推計である。国内最終需要には民間消費支出、政府消費支出、総固定資本形成、在庫純増などがある。

(6) 再生資源・加工処理部門の推計

アジア諸国の産業連関表にはこの部門はないため、説明は省略する。

(7) 投入額（中間投入・付加価値額）推計（試算表の作成）

図 3.1 の⑤と⑥の部分の推計である。付加価値の中には雇用者報酬、営業余剰、資本減耗引当、間接税などがある。

(8) バランス調整

機械的な表全体のバランス調整を行う。大まかに述べれば、各部門とも次式が成立するように数字を調整する。

（行方向）　国内生産額＝中間取引＋国内最終需要＋輸出－輸入

（列方向）　国内生産額＝中間取引＋付加価値

日本の産業連関表の延長推計には、各付加価値項目と各国内最終需要項目に関する制約式も加わる。

(9) 固定価格評価表（実質表）の作成

説明は省略する。

(10) 部門統合

説明は省略する。

以下の小節では、中国、台湾、シンガポールで 2005 年産業連関表の延長推計のためになされた作業を IDE-JETRO［2012］に基づいて要約する。なお、中国の延長推計作業に関しては、本稿では説明を簡潔にするために、まず、①2002 年基本表（内生 122 部門）を国家統計局などのデータを使用して内生部門を 133 部門に部門分割し、次いで、②その表を基本表として 2005 年表（内生 133 部門）を延長推計したという順序で説明しており、必ずしも IDE-JETRO［2012］の説明に忠実ではない点に注意されたい。

2. 国内生産額の推計

ここでは部門別国内生産額が推計される。国内生産額は一国の産業連関表の中で最も重要な数字であり、IDE-JETRO［2012］では、各国とも国内生産額をコントロール・トータルと呼んでいる。それは、産業連関表中の全ての数字がこれと整合的になるように調整されるためである。

＜中　　国＞

基準年（2002 年）の国内生額を国家統計局のデータにより 133 部門に分割し、各部門の名目成長率を用いて 2005 年の国内生額を推計した。名目成長率は統計年鑑、工業統計年鑑などから得た。ただし、既に存在している 2005 年延長産業連関表（42 部門）の国内生産額と整合的になるようにした。

なお、サービス部門の国内生産額の 3 種類の定義についての記述があるが、ここでは省略する。

＜台　　湾＞

国民所得統計年報から 2005 年の GDP の集計値が得られる。2005 年の総産出（＝国内生産額）は基準年（2004 年）の総産出の配分比率から得たと述べられているが、詳細は不明である。さらなる検討を要する。

＜シンガポール＞

2005 年製造業活動調査において、シンガポール標準産業分類（SSIC）の 2 桁レベル

のデータが提供されているが、産業連関表の部門分類はそれより詳しくなっている。そこで、上記調査から情報が得られない部門については、①シンガポール経済開発庁から入手したデータ、②基準年（2000 年）から対象年（2005 年）への国産品輸出の伸びなどを用いて推計した（国内生産額の伸び率は国産品輸出の伸び率に非常に近いという仮定に従っている)。以下の 8 部門に属する企業数は 5 未満であったため上の②の方法を使用した。

SIO019：アルコール飲料
SIO020：タバコ製品
SIO048：ガラス繊維およびガラス繊維製品
SIO049：セメント
SIO051：レンガおよび窯業製品
SIO069：コンデンサーおよびレジスター
SIO090：スクラップ
SIO094：時計

また、統計局の経済調査は次のサービス部門をカバーしている。

① 卸売
② 小売
③ 飲食業
④ 運輸および倉庫
⑤ 教育
⑥ 保健
⑦ 情報および通信
⑧ サービス

なお、調査データは SSIC2005 に従っているが、産業連関表は SSIC2000 に従っているため、両者の対応表を作成した。なお、サービス部門のデータは公表データを直接参照するか部門分割した。

3. 輸出入額の推計

ここでは、部門別の輸出入額が推計される。一般の商品貿易に加えて特殊貿易と直接購入も含まれることに注意が必要である。また、輸入には関税と輸入品商品税も含

まれることにも注意を要する。

＜中　　国＞

商品貿易は税関から入手した10桁HS分類によるデータから集計した。その際、国家統計局の2002年産業連関表と10桁HS分類の対応表を使用した。

サービス貿易については、2005年延長産業連関表（42部門）を部門分割して推計した。その際、2002年表の構造を参照しつつ、幾つかの調整も行った。2002年産業連関表にはサービス部門が34部門あり、そのほとんどが輸出を行っているが、輸入は18部門しか行っていない（輸送、郵便サービス、通信など）。

関税と輸入品商品税については、10桁HS分類の関税率と輸入品商品税率を使って集計を行った。

＜台　　湾＞

商品とサービスの輸出入額は、台湾財務省関税局の2005年の通関データに基づいている[1]。この輸出入データにはHSに準拠した10桁の商品コードが付いており、関税額、国際運賃・保険料も得られる。

輸入品商品税に関しては、輸入品商品税額は産業連関表と貿易統計から得られるはずであるが、互いにデータが整合的ではなく、財務省の税統計年鑑の数字を使用した。税統計年鑑の商品別の純商品税収入には国産品と輸入品の両方が含まれている。一方、基準年（2004年）の産業連関表からは国産品商品税が得られるため、これらから2004年の輸入品商品税が推計できる。その比率を使用して、対象年（2005年）の品目別輸入品商品税を推計した。

＜シンガポール＞

シンガポール貿易統計2006年版（データ年は2005年）を使用している。貿易マトリクスを作成するため、International Enterprise Singapore（IE Singapore；元シンガポール貿易開発庁）からデータを入手した。産業連関表では、輸入は国内に留まるもののみであるので、全輸入から再輸出を差し引いたものを用いた。ここでは再輸出が生む付加価値が考慮されていないため、輸入は過小評価になっている。

また、シンガポール表を基本価格から生産者価格に変更するための処理として、①関税と輸入品商品税、②旅行者の支出、③輸出ベクトルの生産者価格化に関する説明が行われている。

各国とも共通することであるが、産業連関表の延長推計の説明ではない箇所に、輸出入額に関連する多くの説明があり、それらが産業連関表の延長推計のためにどのよ

うに利用されたのか不明であった。さらに検討を要する。

4. 国内最終需要額の推計

ここでは、対象年の部門別の民間消費支出、政府消費支出、総固定資本形成、在庫純増などの推計が対象になる。

＜中　　国＞

部門別の民間消費支出、政府消費支出、総固定資本形成、国内最終需要計については、各最終需要項目計および国内最終需要総計の基準年から対象年への名目成長率を基準年の部門構成に掛けて推計した。ただし、2005 年延長産業連関表（42 部門）の数値と整合的になるよう調整した。また、在庫純増は調整項目とした。

＜台　　湾＞

国民所得統計年報から対象年の各最終需要項目の合計が得られる。その各最終需要項目合計を基準年の比率で国産品と輸入品に分け、各最終需要項目と最終需要総計が整合的になるよう調整した。その後、各最終需要項目別合計を基準年の比率で配分した。

＜シンガポール＞

基準年の係数を用いて推計した。その後、民間消費支出と総固定資本形成については、出版物から得られる基準年から対象年への伸び率（産業連関部門分類よりは粗いが）を使用して調整を行った。

5. 付加価値額の推計

ここでは対象年の部門別雇用者報酬、営業余剰、資本減耗引当、間接税（控除、補助金）などの推計が対象になる。

＜中　　国＞

まず、基準年から対象年への付加価値合計の名目成長率と基準年の付加価値構成から対象年の部門別付加価値計を推計した。ただし、2005 年延長産業連関表（42 部門）の部門別付加価値額による調整を行っている。次いで、基準年における部門別の付加価値項目構成比を用いて、対象年の部門別項目別付加価値額を推計した。その後、先に推計した部門別付加価値合計と 2005 年延長産業連関表（42 部門）から得られる項

目別付加価値額をコントロール・トータルとして修正 RAS 法で調整した（理論的には RAS 法による調整を延長産業連関表の部門数の回数だけ（42 回）行ったことになる）。

＜台　　湾＞

国民所得統計年報から、対象年の各付加価値項目の合計が得られる。その合計値を基準年の構造で配分し、バランス調整を行った。

＜シンガポール＞

具体的な記述はない。

6. 中間取引額の推計

ここで取り上げたすべての国において、中間取引の推計のために RAS 法（「修正 RAS 法」と呼んでいる国もある）が使用されている。RAS 法については第 2 節を参照されたい。

＜中　　国＞

まず、列部門ごとに基準年の中間取引額に中間投入計の基準年から対象年への名目成長率を掛けることにより、対象年の中間取引額を第 1 次推計する。次いで、2005 年延長産業連関表（42 部門）の対角線上にあるセル（その値を$\boldsymbol{a}$とする）に対応する（複数の）セルの合計値が$\boldsymbol{a}$になるように調整し、それらの値を凍結する。また、同時に延長産業連関表の対角線上にないセルでも大きい投入係数あるいは産出係数を持つ値についても同じ処理を行い、凍結する。

対象年の中間投入は、総投入マイナス付加価値、中間需要は総産出マイナス最終需要となり、これをコントロール・トータルとして修正 RAS 法で中間取引額を推計する。このとき、凍結された値はゼロとおき、コントロール・トータルからも差し引いた上で修正 RAS 法を適用し、修正 RAS 法の収束後に凍結していた値を元の値に戻す。

このような特定の値を固定（中国表では「凍結」）する方法は、米国産業連関表の延長推計でも行われている（横橋［2005］）。また、第 3 節で述べる拡張 RAS 法も考え方としては同じであるが、拡張 RAS 法ではもう少し柔軟性を持たせている。

＜台　　湾＞

対象年の部門別総産出、部門別中間投入計、部門別中間需要計のデータを揃えた上で、基準年の投入係数を用いて RAS 法により対象年の中間取引額を推計した。

＜シンガポール＞

中間取引額の推計には RAS 法を使用したが、対象年のデータについて以下を確認した。

・(部門ごとに) 中間産出＝総産出－民間消費支出－政府消費支出－総固定資本形成
－在庫純増－輸出＞0

・(部門ごとに) 中間投入＝総投入－付加価値（基本価格）－輸入関税＞0

・(総額で) 付加価値＋物品税＝最終需要

・(部門ごとに) 最終需要＝民間消費支出＋政府消費支出＋総固定資本形成＋在庫純増
＋国産品輸出－輸入（国内に留まったもの）

また、使用された RAS 法のプログラムは、かつてアジア経済研究所で開発され、後でシンガポール仕様に修正されたものが用いられている。

第 2 節　中間取引額の推計手法

本節では、一国の産業連関表の中間取引部分の延長推計に関する各種の手法を紹介する。まず、さまざまな延長推計手法について説明し、次にその手法を実際のデータに当てはめてシミュレーションを行うが、手法そのものは、平均増加倍率法（乗法）を除いて金子［1977］で紹介されているものである。ここではできるだけノーテーションを統一し、各延長推計手法の異同がノーテーションから分かるよう説明を心掛ける。

本節では産業連関表の形が基準年のものも対象年のものも同じとみなし、次のような極めて簡素なものを考える。

$$
\begin{array}{|cccc|c|c|c|}
\hline
\boldsymbol{c_{11}} & \boldsymbol{c_{12}} & \cdots & \boldsymbol{c_{1n}} & \boldsymbol{w_1} & \boldsymbol{F_1} & \boldsymbol{X_1} \\
\boldsymbol{c_{21}} & \boldsymbol{c_{22}} & \cdots & \boldsymbol{c_{2n}} & \boldsymbol{w_2} & \boldsymbol{F_2} & \boldsymbol{X_2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{c_{n1}} & \boldsymbol{c_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{c_{nn}} & \boldsymbol{w_n} & \boldsymbol{F_n} & \boldsymbol{X_n} \\
\hline
\boldsymbol{z_1} & \boldsymbol{z_2} & \cdots & \boldsymbol{z_n} \\
\cline{1-4}
\boldsymbol{V_1} & \boldsymbol{V_2} & \cdots & \boldsymbol{V_n} \\
\cline{1-4}
\boldsymbol{X_1} & \boldsymbol{X_2} & \cdots & \boldsymbol{X_n} \\
\cline{1-4}
\end{array}
$$

ここで使用している記号の意味は次に示すとおりである。

$\boldsymbol{c_{ij}}$：　中間取引額（$\boldsymbol{i, j = 1, 2, \cdots, n}$）

$\boldsymbol{z_j}$：　中間投入計（$\boldsymbol{j = 1, 2, \cdots, n}$）

$\boldsymbol{V_j}$：　付加価値（$\boldsymbol{j = 1, 2, \cdots, n}$）
$\boldsymbol{X_j}$：　国内生産額（＝総投入＝総産出）（$\boldsymbol{j = 1, 2, \cdots, n}$）
$\boldsymbol{w_i}$：　中間需要計（$\boldsymbol{i = 1, 2, \cdots, n}$）
$\boldsymbol{F_i}$：　最終需要（$\boldsymbol{i = 1, 2, \cdots, n}$）

また､これらの記号にスーパースクリプトとして“0”を付けたものは基準年のもの、スーパースクリプトのないものは対象年のものとする。また、0 以外のスーパースクリプトはイタレーション番号など、イタレーション中のものを指す。（$\boldsymbol{k}$回目のイタレーション結果など)。

1. RAS 法

RAS 法は最も頻繁に使用されている延長推計手法である。
まず、基準年の投入係数行列が次のように与えられているとする。

$$\mathrm{A}^{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}^0} & \boldsymbol{a_{12}^0} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}^0} \\ \boldsymbol{a_{21}^0} & \boldsymbol{a_{22}^0} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}^0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}^0} & \boldsymbol{a_{n2}^0} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}^0} \end{bmatrix}$$

ここで、$\boldsymbol{a_{ij}^0 = c_{ij}^0 / X_j^0}$（$\boldsymbol{i, j = 1, 2, \cdots, n}$）である。
次に、対象年の外生部門の値、つまり、国内生産額、付加価値、最終需要が何らかの方法で推計されているとすると、対象年の中間投入計と中間需要計が決まる。そこで、その対象年の国内生産額$[\boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{X_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{X_n}]$、中間投入計$[\boldsymbol{z_1} \quad \boldsymbol{z_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{z_n}]$、中間需要計$[\boldsymbol{w_1} \quad \boldsymbol{w_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{w_n}]'$および基準年の投入係数が与えられたとき、対象年の中間取引部分を推計する手法のひとつが RAS 法である。
まず、基準年の投入係数と対象年の国内生産額から対象年の中間取引の初期値を次のように得る。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c_{11}^*} & \boldsymbol{c_{12}^*} & \cdots & \boldsymbol{c_{1n}^*} \\ \boldsymbol{c_{21}^*} & \boldsymbol{c_{22}^*} & \cdots & \boldsymbol{c_{2n}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{c_{n1}^*} & \boldsymbol{c_{n2}^*} & \cdots & \boldsymbol{c_{nn}^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}^0} & \boldsymbol{a_{12}^0} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}^0} \\ \boldsymbol{a_{21}^0} & \boldsymbol{a_{22}^0} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}^0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}^0} & \boldsymbol{a_{n2}^0} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{X_n} \end{bmatrix}$$

ここで得られた中間取引行列の行合計（各行の合計）が対象年の中間需要計に等し

くなるように中間取引行列を調整し、次いで得られた中間取引行列の列合計（各列の合計）が対象年の中間投入計に等しくなるよう中間取引行列を調整する。調整の方法は以下のようになり、逐次この 1 組の調整を繰り返す。

（第 1 ステップの前半）

対象年の中間需要計と初期値の行合計、$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{*}$（$i = 1, 2, \cdots, n$）、との比率（「行修正係数」と呼ぶ）を求めると、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} r_1^0 \\ r_2^0 \\ \vdots \\ r_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 / \sum_{j=1}^{n} c_{1j}^{*} \\ w_2 / \sum_{j=1}^{n} c_{2j}^{*} \\ \vdots \\ w_n / \sum_{j=1}^{n} c_{nj}^{*} \end{bmatrix}$$

左辺の要素r_i^0（$i = 1, 2, \cdots, n$）を対角要素として並べた行列

$$\hat{\mathrm{R}}^0 = \begin{bmatrix} r_1^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2^0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n^0 \end{bmatrix}$$

を初期値の左から掛ける。

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_{11}^{*} & \dot{c}_{12}^{*} & \cdots & \dot{c}_{1n}^{*} \\ \dot{c}_{21}^{*} & \dot{c}_{22}^{*} & \cdots & \dot{c}_{2n}^{*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{c}_{n1}^{*} & \dot{c}_{n2}^{*} & \cdots & \dot{c}_{nn}^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2^0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}^{*} & c_{12}^{*} & \cdots & c_{1n}^{*} \\ c_{21}^{*} & c_{22}^{*} & \cdots & c_{2n}^{*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{*} & c_{n2}^{*} & \cdots & c_{nn}^{*} \end{bmatrix}$$

それにより、対象年の中間需要計と行合計とが等しくなる行列が得られる。

（第 1 ステップの後半）

上で得た行列は行方向にはバランスが取れているが、一般に列方向にはバランスが取れていない。そこで、対象年の中間投入計と上で得られた行列の列合計、$\sum_{i=1}^{n} \dot{c}_{ij}^{*}$（$j = 1, 2, \cdots, n$）の比率（「列修正係数」と呼ぶ）を次のように求める。

$$\begin{bmatrix} s_1^0 & s_2^0 & \cdots & s_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_1}{\sum_{i=1}^{n} \dot{c}_{i1}^{*}} & \frac{z_2}{\sum_{i=1}^{n} \dot{c}_{i2}^{*}} & \cdots & \frac{z_n}{\sum_{i=1}^{n} \dot{c}_{in}^{*}} \end{bmatrix}$$

これの対角行列

$$\hat{\mathbf{S}}^{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} s_1^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2^0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n^0 \end{bmatrix}$$

を上で得られた行列の右から掛ける。

$$\begin{bmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & \dots & c_{1n}^1 \\ c_{21}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^1 & c_{n1}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c}_{11}^* & \dot{c}_{12}^* & \dots & \dot{c}_{1n}^* \\ \dot{c}_{21}^* & \dot{c}_{22}^* & \dots & \dot{c}_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{c}_{n1}^* & \dot{c}_{n2}^* & \dots & \dot{c}_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2^0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_n^0 \end{bmatrix}$$

これが対象年の中間取引行列の第 1 次推計値である。

この行列は列方向へのバランスはとれているが、今度は一般に行方向へのバランスが崩れているため、上の操作を繰り返す。一般的に$\boldsymbol{k}$回目のイタレーションの操作は次のようになる。

（第$\boldsymbol{k}$ステップの前半）

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_{11}^{k-1} & \dot{c}_{12}^{k-1} & \dots & \dot{c}_{1n}^{k-1} \\ \dot{c}_{21}^{k-1} & \dot{c}_{22}^{k-1} & \dots & \dot{c}_{2n}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{c}_{n1}^{k-1} & \dot{c}_{n2}^{k-1} & \dots & \dot{c}_{nn}^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^{k-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}^{k-1} & c_{12}^{k-1} & \dots & c_{1n}^{k-1} \\ c_{21}^{k-1} & c_{22}^{k-1} & \dots & c_{2n}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{k-1} & c_{n2}^{k-1} & \dots & c_{nn}^{k-1} \end{bmatrix}$$

（第$\boldsymbol{k}$ステップの後半）

$$\begin{bmatrix} c_{11}^k & c_{12}^k & \dots & c_{1n}^k \\ c_{21}^k & c_{22}^k & \dots & c_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^k & c_{n2}^k & \dots & c_{nn}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c}_{11}^{k-1} & \dot{c}_{12}^{k-1} & \dots & \dot{c}_{1n}^{k-1} \\ \dot{c}_{21}^{k-1} & \dot{c}_{22}^{k-1} & \dots & \dot{c}_{2n}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{c}_{n1}^{k-1} & \dot{c}_{n2}^{k-1} & \dots & \dot{c}_{nn}^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2^{k-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_n^{k-1} \end{bmatrix}$$

ここで、c_{ij}^{k-1}（$i, j = 1, 2, \cdots, n$）は$k-1$回目のイタレーションの結果、r_i^{k-1}（$i = 1, 2, \cdots, n$）は列修正係数である。

この操作を繰り返し、得られた行列の列合計と対象年の中間投入計および行合計と対象年の中間需要計の乖離が十分小さくなったところでイタレーションを終え、収束したと考える。

$\boldsymbol{p}$回のイタレーションで収束したとき、

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c_{11}^p} & \boldsymbol{c_{12}^p} & \dots & \boldsymbol{c_{1n}^p} \\ \boldsymbol{c_{21}^p} & \boldsymbol{c_{22}^p} & \dots & \boldsymbol{c_{2n}^p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{c_{n1}^p} & \boldsymbol{c_{n2}^p} & \dots & \boldsymbol{c_{nn}^p} \end{bmatrix}$$

が延長推計表の中間取引部分となる。また、

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r_1} \\ \boldsymbol{r_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r_1^0 r_1^1 \cdots r_1^{p-1}} \\ \boldsymbol{r_2^0 r_2^1 \cdots r_2^{p-1}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r_n^0 r_n^1 \cdots r_n^{p-1}} \end{bmatrix}$$

とおき、これの対角行列を

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{r_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{r_1} \end{bmatrix}$$

とする。同様に

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{s_1} \\ \boldsymbol{s_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{s_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s_1^0 s_1^1 \cdots s_1^{p-1}} \\ \boldsymbol{s_2^0 s_2^1 \cdots s_2^{p-1}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{s_n^0 s_n^1 \cdots s_n^{p-1}} \end{bmatrix}$$

とおき、これの対角行列を

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{s_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{s_1} \end{bmatrix}$$

とする。

　この$\hat{\mathbf{R}}$と$\hat{\mathbf{S}}$を用いると、中間取引行列の初期値と延長推計された中間取引行列の関係は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} c_{11}^{p} & c_{12}^{p} & \cdots & c_{1n}^{p} \\ c_{21}^{p} & c_{22}^{p} & \cdots & c_{2n}^{p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{p} & c_{n2}^{p} & \cdots & c_{nn}^{p} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} c_{11}^{*} & c_{12}^{*} & \cdots & c_{1n}^{*} \\ c_{21}^{*} & c_{22}^{*} & \cdots & c_{2n}^{*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{*} & c_{n2}^{*} & \cdots & c_{nn}^{*} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}$$

この両辺に対象年の国内生産額の逆数からなる対角行列を右から掛け、基準年の投入係数行列を改めて$\mathbf{A}^{\mathbf{0}}$と書くと、対象年の投入係数は基準年の投入係数を用いて次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} c_{11}^{p} & c_{12}^{p} & \cdots & c_{1n}^{p} \\ c_{21}^{p} & c_{22}^{p} & \cdots & c_{2n}^{p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{p} & c_{n2}^{p} & \cdots & c_{nn}^{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_n^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} c_{11}^{*} & c_{12}^{*} & \cdots & c_{1n}^{*} \\ c_{21}^{*} & c_{22}^{*} & \cdots & c_{2n}^{*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{*} & c_{n2}^{*} & \cdots & c_{nn}^{*} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_n^{-1} \end{bmatrix}$$

上の左辺は対象年の投入係数であり、右辺は少し変形して下の式を得る。

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{p} & a_{12}^{p} & \cdots & a_{1n}^{p} \\ a_{21}^{p} & a_{22}^{p} & \cdots & a_{2n}^{p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{p} & a_{n2}^{p} & \cdots & a_{nn}^{p} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} c_{11}^{*} & c_{12}^{*} & \cdots & c_{1n}^{*} \\ c_{21}^{*} & c_{22}^{*} & \cdots & c_{2n}^{*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{*} & c_{n2}^{*} & \cdots & c_{nn}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_n^{-1} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}$$

$$= \hat{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} a_{11}^{0} & a_{12}^{0} & \cdots & a_{1n}^{0} \\ a_{21}^{0} & a_{22}^{0} & \cdots & a_{2n}^{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{0} & a_{n2}^{0} & \cdots & a_{nn}^{0} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}$$

$$= \hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\mathbf{0}}\hat{\mathbf{S}}$$

これが RAS 法と呼ばれる所以である。$\hat{\mathbf{R}}$は基準年の投入係数の各行を変化させるもので、$\hat{\mathbf{S}}$は各列を変化させるものである。金子［1977］では、$\hat{\mathbf{R}}$を加工度変化修正係数の対角行列、$\hat{\mathbf{S}}$を代替変化修正係数の対角行列と呼んでいる。

ここで注意を要するのは、RAS 法はいつでも収束が保障されているものではないということである。経験によれば、対象年の部門別国内生産額、付加価値額、最終需要額の数字を固めた直後の段階では、むしろ、RAS 法は収束しないことの方が多い。収

束しない場合に、RAS 法の収束の過程をよく観察し、そこで何が起こっているのかを細かく検討すると、収集した国内生産額、付加価値額、最終需要額のデータの中にある種の不整合を発見することが多い。例えば、米の生産量に対する精米の生産量の過多、あるいは過少といったようなことである。この場合には、米と精米の部門の行修正係数あるいは列修正係数が 1 から大きく乖離し、収束に向かわないということにより問題点を発見することができる。

2. 平均増加倍率法（加法）

平均増加倍率法（加法）は、基準年の中間取引および対象年の中間投入計と中間需要計が与えられて、対象年の中間取引を直接推計する。その方法は RAS 法と同じく、イタレーションによる。この方法では、イタレーションの途中で、対象年の中間需要計と中間取引行列の行合計の比である行修正係数で各行を調整し、また、対象年の中間投入計と中間取引行列の列合計の比である列修正係数で各列を調整するのは RAS 法の場合と同じであるが、平均増加倍率法では、それらを同時に行い、双方の結果を足して 2 で割るという方法で調整を行う点で RAS 法とは異なっている。なお、金子［1977］はこの方法を単に「平均増加倍率法」と呼んでいるが、本稿では次の小節の手法と区別するために平均増加倍率法（加法）とした。

ここで、初期の行修正係数と列修正係数が以下のとおりであったとする。

$$[\boldsymbol{r_1^0} \quad \boldsymbol{r_2^0} \quad \cdots \quad \boldsymbol{r_n^0}] = \left[\frac{\boldsymbol{w_1}}{\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c_{1j}^0}} \quad \frac{\boldsymbol{w_2}}{\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c_{2j}^0}} \quad \cdots \quad \frac{\boldsymbol{w_n}}{\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c_{nj}^0}}\right]$$

$$[\boldsymbol{s_1^0} \quad \boldsymbol{s_2^0} \quad \cdots \quad \boldsymbol{s_n^0}] = \left[\frac{\boldsymbol{z_1}}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c_{i1}^0}} \quad \frac{\boldsymbol{z_2}}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c_{i2}^0}} \quad \cdots \quad \frac{\boldsymbol{z_n}}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c_{in}^0}}\right]$$

（第 1 ステップ）

上の 2 種類の係数を用いて、基準年の中間取引を次のように調整する。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C_{11}^1} & \boldsymbol{c_{12}^1} & \cdots & \boldsymbol{c_{1n}^1} \\ \boldsymbol{c_{21}^1} & \boldsymbol{c_{22}^1} & \cdots & \boldsymbol{c_{2n}^1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{c_{n1}^1} & \boldsymbol{c_{n2}^1} & \cdots & \boldsymbol{c_{nn}^1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r_1^0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{r_2^0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{r_n^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_{11}^0} & \boldsymbol{c_{12}^0} & \cdots & \boldsymbol{c_{1n}^0} \\ \boldsymbol{c_{21}^0} & \boldsymbol{c_{22}^0} & \cdots & \boldsymbol{c_{2n}^0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{c_{n1}^0} & \boldsymbol{c_{n2}^0} & \cdots & \boldsymbol{c_{nn}^0} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} c_{11}^{0} & c_{12}^{0} & \cdots & c_{1n}^{0} \\ c_{21}^{0} & c_{22}^{0} & \cdots & c_{2n}^{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{0} & c_{n2}^{0} & \cdots & c_{nn}^{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{1}^{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{2}^{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n}^{0} \end{bmatrix}$$

この操作の後、一般的には列方向にも行方向にもバランスは取れていない。したがって、同じ操作を繰り返す。$\boldsymbol{k-1}$回目の繰り返しの後、行修正係数と列修正係数が、それぞれ$\begin{bmatrix} r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_n^{k-1} \end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix} s_1^{k-1} & s_2^{k-1} & \cdots & s_n^{k-1} \end{bmatrix}$であったとすると、$\boldsymbol{k}$回目の調整は次のようになる。

（第$\boldsymbol{k}$ステップ）

$$\begin{bmatrix} c_{11}^{k} & c_{12}^{k} & \cdots & c_{1n}^{k} \\ c_{21}^{k} & c_{22}^{k} & \cdots & c_{2n}^{k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{k} & c_{n2}^{k} & \cdots & c_{nn}^{k} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} r_{1}^{k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{2}^{k-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{n}^{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11}^{k-1} & c_{12}^{k-1} & \cdots & c_{1n}^{k-1} \\ c_{21}^{k-1} & c_{22}^{k-1} & \cdots & c_{2n}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{k-1} & c_{n2}^{k-1} & \cdots & c_{nn}^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} c_{11}^{k-1} & c_{12}^{k-1} & \cdots & c_{1n}^{k-1} \\ c_{21}^{k-1} & c_{22}^{k-1} & \cdots & c_{2n}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{k-1} & c_{n2}^{k-1} & \cdots & c_{nn}^{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{1}^{k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{2}^{k-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n}^{k-1} \end{bmatrix}$$

この操作を続けて$\boldsymbol{p}$回目のイタレーションの後、行修正係数と列修正係数が充分に 1 に近ければ、そこで収束したものとしてイタレーションを終了する。そのときの対象年における中間取引の延長推計値は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} c_{11}^{p} & c_{12}^{p} & \cdots & c_{1n}^{p} \\ c_{21}^{p} & c_{22}^{p} & \cdots & c_{2n}^{p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{p} & c_{n2}^{p} & \cdots & c_{nn}^{p} \end{bmatrix}$$

ここでは RAS 法のような$\hat{\mathbf{R}}$と$\hat{\mathbf{S}}$は得られない。また、この方法についても、必ずしも収束は保障されていない。

3. 平均増加倍率法（乗法）

2.で説明した「平均増加倍率法（加法）」は、中間取引の行合計と与えられた中間需

要計との乖離および中間取引の列合計と与えられた中間投入計との乖離を行と列で同時に調節し、それを足して 2 で割ること（両者の算術平均）により調整を続けるという方法である。それならば、その幾何平均版があっても良いはずである。それが「平均増加倍率法（乗法）」である。この定式化のために、平均増加倍率法（加法）のイタレーション第$\boldsymbol{k}$ステップを成分表示でみると次のようになる。

$$\left[c_{ij}^{k}\right]=\frac{1}{2}\left[r_i^{k-1}c_{ij}^{k-1}\right]+\frac{1}{2}\left[c_{ij}^{k-1}s_j^{k-1}\right]=\frac{1}{2}\left[r_i^{k-1}c_{ij}^{k-1}+c_{ij}^{k-1}s_j^{k-1}\right]$$

上式の右辺を幾何平均に置き換えれば次のようになる。

$$\left[c_{ij}^{k}\right]=\left[\sqrt{r_i^{k-1}c_{ij}^{k-1}}\sqrt{c_{ij}^{k-1}s_j^{k-1}}\right]=\left[\sqrt{r_i^{k-1}}c_{ij}^{k-1}\sqrt{s_j^{k-1}}\right]$$

これを平均増加倍率法（加法）と同様に定式化する。平均増加倍率法（加法）の場合と同様に、ここで与えられるのは基準年の中間取引と対象年の中間需要計と中間投入計で、それらの記号も同じであるとする。

平均増加倍率法（加法）と同様に、初期値の行修正係数と列修正係数は下のようになる。

$$\begin{bmatrix} r_1^0 & r_2^0 & \cdots & r_n^0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{\sum_{j=1}^{n} c_{1j}^0} & \frac{w_2}{\sum_{j=1}^{n} c_{2j}^0} & \cdots & \frac{w_n}{\sum_{j=1}^{n} c_{nj}^0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1^0 & s_2^0 & \cdots & s_n^0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{z_1}{\sum_{i=1}^{n} c_{i1}^0} & \frac{z_2}{\sum_{i=1}^{n} c_{i2}^0} & \cdots & \frac{z_n}{\sum_{i=1}^{n} c_{in}^0} \end{bmatrix}$$

このとき、第 1 ステップは次のようになる。

（第 1 ステップ）

$$\begin{bmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & \dots & c_{1n}^1 \\ c_{21}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^1 & c_{n2}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{r_1^0} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{r_2^0} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{r_n^0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11}^0 & c_{12}^0 & \cdots & c_{1n}^0\\ c_{21}^0 & c_{22}^0 & \cdots & c_{2n}^0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1}^0 & c_{n2}^0 & \cdots & c_{nn}^0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{s_1^0} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{s_2^0} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{s_n^0}\end{bmatrix}$$

この操作後は、一般的に行方向および列方向のいずれについてもバランスは取れていないため、同じ操作を繰り返す必要がある。一般的に第$\boldsymbol{k}$ステップは以下のようになる。

（第$\boldsymbol{k}$ステップ）

$$\begin{bmatrix}c_{11}^k & c_{12}^k & \cdots & c_{1n}^k\\ c_{21}^k & c_{22}^k & \cdots & c_{2n}^k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1}^k & c_{n2}^k & \cdots & c_{nn}^k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{r_1^{k-1}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{r_2^{k-1}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{r_n^{k-1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11}^{k-1} & c_{12}^{k-1} & \cdots & c_{1n}^{k-1}\\ c_{21}^{k-1} & c_{22}^{k-1} & \cdots & c_{2n}^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1}^{k-1} & c_{n2}^{k-1} & \cdots & c_{nn}^{k-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{s_1^{k-1}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{s_2^{k-1}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{s_n^{k-1}}\end{bmatrix}$$

ここで、左辺は第$\boldsymbol{k}$ステップの結果であり、右辺の各行列は、それぞれ以下を意味する。

$$\begin{bmatrix}c_{11}^{k-1} & c_{12}^{k-1} & \cdots & c_{1n}^{k-1}\\ c_{21}^{k-1} & c_{22}^{k-1} & \cdots & c_{2n}^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1}^{k-1} & c_{n2}^{k-1} & \cdots & c_{nn}^{k-1}\end{bmatrix}:$$

$\boldsymbol{k-1}$回目のイタレーションの結果

$$\begin{bmatrix}\sqrt{r_1^{k-1}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{r_2^{k-1}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{r_n^{k-1}}\end{bmatrix}:$$

$\boldsymbol{k-1}$回目のイタレーション後の行修正係数の平方根からなる対角行列

この双方の係数が 1 に充分近くなったところで、イタレーションを終え、収束したものとする。もしも、$\boldsymbol{p}$回目のイタレーション後の行修正係数の平方根からなる対角行列回のイタレーションで収束した場合は、

$$\begin{bmatrix} c_{11}^{p} & c_{12}^{p} & \cdots & c_{1n}^{p} \\ c_{21}^{p} & c_{22}^{p} & \cdots & c_{2n}^{p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^{p} & c_{n2}^{p} & \cdots & c_{nn}^{p} \end{bmatrix}$$

が対象年の中間取引の推計値となる。

平均増加倍率法（加法）の場合と異なり、乗法の場合には、RAS 法のときに得られた$\hat{\mathbf{R}}$と$\hat{\mathbf{S}}$に対応するものが得られる。ただし、RAS 法のそれらと比較すると、平均増加倍率法（乗法）の場合は過大に評価されるので注意が必要である。その理由は、以下のとおりである。

RAS 法の中間取引の初期値は$[c_{ij}^{*}]$、平均増加倍率法（乗法）の中間取引の初期値は$[c_{ij}^{0}]$であり、両者の間には

$$c_{ij}^{*} = c_{ij}^{0} \cdot \frac{X_i}{X_i^0} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

の関係がある。もし、RAS 法の結果が平均増加倍率法（乗法）の結果に近ければ（実際、非常に近い結果が得られる）、平均増加倍率法（乗法）で得られる$\hat{\mathbf{S}}$と RAS 法で得られる$\hat{\mathbf{S}}$の間にはおおよそX_i/X_i^0の差があると思われるからである。

また、この方法についても、RAS 法と平均増加倍率法（加法）の場合と同様、必ずしも収束するとは限らない。

4. フレーター法に関するコメント

金子［1977］では、「フレーター法」が平均増加倍率法（加法）に似た方法として紹介されている。「フレーター法」という名称は、基準年の中間取引から投入係数を経由せず、直接対象年の中間取引を推計している点を指して、そのように呼んでいると思われる。しかし、フレーター法の式をよくみると、それは RAS 法の列方向の調整から始めたものと同じであることがわかる。

フレーター法では平均増加倍率法と同じく、基準年の中間取引、対象年の中間投入計と中間需要計が与えられて、対象年の中間取引が推計されるが、それらの記号は今

までに出てきたものと同じであるとする。

金子［1977］によると、フレーター法の第$\boldsymbol{k}$回のイタレーション式は次のようになっている（記号の一部は、金子［1977］のものとは異なっている）。

$$c_{ij}^{k}=c_{ij}^{k-1}\cdot\frac{w_i}{w_i^{k-1}}\cdot\frac{z_j}{z_j^{k-1}}\cdot\frac{\sum_j c_{ij}^{k-1}}{\sum_j\left(\frac{z_j}{z_j^{k-1}}\right)c_{ij}^{k-1}}$$

ただし、左辺は$\boldsymbol{k}$回目のイタレーション後の中間取引行列の$\boldsymbol{i-j}$成分、右辺の$\boldsymbol{c_{ij}^{k-1}}$（$\boldsymbol{i,j=1,2,\cdots,n}$）は$\boldsymbol{k-1}$回目のイタレーション結果、$\boldsymbol{w_i}$（$\boldsymbol{i=1,2,\cdots,n}$）は対象年の中間需要計、$\boldsymbol{w_i^{k-1}}$は$\boldsymbol{k-1}$回目のイタレーション後の中間取引行列の行計、$\boldsymbol{z_j}$（$\boldsymbol{j=1,2,\cdots,n}$）は対象年の中間投入計、$\boldsymbol{z_j^{k-1}}$（$\boldsymbol{j=1,2,\cdots,n}$）は$\boldsymbol{k-1}$回目のイタレーション後の中間取引行列の列和である。

この右辺を書き換えると次のようになる。

$$c_{ij}^{k}=c_{ij}^{k-1}\cdot\frac{w_i}{\sum_j\left(\frac{z_j}{z_j^{k-1}}\right)c_{ij}^{k-1}}\cdot\frac{z_j}{z_j^{k-1}}\cdot\frac{\sum_j c_{ij}^{k-1}}{w_i^{k-1}}=c_{ij}^{k-1}\cdot\frac{z_j}{z_j^{k-1}}\cdot\frac{w_i}{\sum_j\left(\frac{z_j}{z_j^{k-1}}\right)c_{ij}^{k-1}}$$

上の最後の式は、第 1 因子と第 2 因子が$\boldsymbol{k-1}$回目の RAS 法の列方向の調整を意味しており、第 3 因子がその結果を受けた行方向への調整を意味している。したがって、フレーター法は RAS 法の列方向の調整、次いで行方向の調整をひとつの式の中で実行しているものである。ただ、アルゴリズムからみると、その効率は RAS 法もフレーター法も全く同じである。

また、経験的には RAS 法が収束した場合、行方向、列方向のいずれから調整を始めても同じ結果が得られる。理論的な証明はできていないが、双方の収束条件をより厳しくして 2 種類の RAS 法を適用するとより近い結果が得られることから、2 つの方法が同一である可能性は高いと考えられる。

5. ラグランジュ未定係数法

今までの方法は、すべて基準年の中間取引の構造から始めて、対象年の中間需要計と中間投入計に一致するような対象年の中間取引を逐次計算で探り当てるという方法である。それに対して、ラグランジュ未定係数法も基準年の中間取引の構造が与えられ、対象年の中間需要計と中間投入計に一致するような対象年の中間取引を推計する

方法であるが、逐次計算は行わず、一気に数学的なある種の最適解を求めるものである。途中の解を導き出す計算式は省略して、その定式化と解を得る公式を金子［1977］から引用する。ただし、ノーテーションは一部異なる。

与えられるのは、以下の値である。

$$\begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \cdots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & \cdots & a_{2n}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \cdots & a_{nn}^0 \end{bmatrix} :$$ 基準年の投入係数

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} :$$ 対象年の総産出

$$[d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n] :$$ 対象年の投入係数の中間投入計

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} :$$ 対象年の中間需要計

そこで、下に述べるような自然な制約条件を充たし、基準年の投入係数に最も近くなるような対象年の投入係数

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

を推計するのがラグランジュ未定計数法である。

制約条件は今までとほぼ同様であるが、中間需要側は取引額で、中間投入側は投入係数で次のように与えられている。

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = w_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ および

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$

また、基準年の投入係数に最も近い投入係数は、目的関数として、次のように記述される。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - a_{ij}^0)^2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{min}.$$

これをラグランジュの未定係数法で解くと、対象年の投入係数行列は成分表記で次のようになる。

$$a_{ij} = a_{ij}^0 + \frac{1}{n}\left(d_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^0\right) + \frac{X_j}{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}\left(w_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 X_j\right)$$

$$- \frac{X_j}{n\sum_{j=1}^{n} X_j^2}\left(\sum_{j=1}^{n}(d_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^0\right)X_j$$

6. 各延長推計法のパフォーマンス

ここでは、今までに取り上げた中間取引部分の延長推計法である RAS 法、平均増加倍率法（加法)、平均増加倍率法（乗法）およびラグランジュ未定係数法のパフォーマンスを、実際のデータを用いて比較する。RAS 法については、列方向から調整を始める場合と行方向から始める場合とで経験的に同じ結果が得られるので、今回はやや計算の楽な列方向から調整を始めることにした。また、フレーター法については、RAS 法と同じ結果が得られるので今回は取り上げない。

ここで使用するデータは、2000 年および 2005 年のアジア国際産業連関表（7 部門）から、台湾とインドネシア部分の国内中間取引、国内中間投入計、国内中間需要計および国内生産額を抽出したものである（IDE-JETRO［2006, 2013]）。

2000 年の台湾表とインドネシア表の国内中間取引に各延長推計法を別々に適用して、2005 年の国内中間取引を延長推計し、そのパフォーマンスを比較した。したがって、2000 年が基準年、2005 年が対象年となる。

RAS 法については、2000 年の国内投入係数、2005 年の国内生産額、国内中間投入計および国内中間需要計を与えて、2005 年の国内中間取引を延長推計した。また、平均増加倍率法（加法および乗法）については、2000 年の国内中間取引、2005 年の国内中間需要計および国内中間投入計を与えて、2005 年の国内中間取引を延長推計した。さらに、ラグランジュ未定係数法については、2000 年の国内投入係数、2005 年の国内中間投入係数計、国内中間需要計および国内生額を与えて、2005 年の国内投入係数を延長推計した。

パフォーマンス比較のため、実際に実現された台湾とインドネシアの 2005 年の国内投入係数と延長推計法で得られた 2005 年の国内投入係数を相互に比較している（RAS 法および平均増加倍率表（加法、乗法）で得られた結果も、比較のために投入係数に変換している)。

なお、RAS 法と平均増加倍率法の収束条件は 0.001 とした。より正確には、2005 年

の国内中間投入計と国内中間需要計を、それぞれ$[\boldsymbol{z_1} \quad \boldsymbol{z_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{z_n}]$および$[\boldsymbol{w_1} \quad \boldsymbol{w_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{w_n}]$とし、$\boldsymbol{p}$回目のイタレーション結果の中間投入計と中間需要計をそれぞれ$[\boldsymbol{z_1^p} \quad \boldsymbol{z_2^p} \quad \cdots \quad \boldsymbol{z_n^p}]$および$[\boldsymbol{w_1^p} \quad \boldsymbol{w_2^p} \quad \cdots \quad \boldsymbol{w_n^p}]$としたとき、次の条件が充たされればイタレーションを終了し、収束したとみなした。

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{z_j}{z_j^p}-1\right)^2}{n}} < 0.001 \quad \text{かつ} \quad \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_j}{w_j^p}-1\right)^2}{n}} < 0.001$$

表 3.1 と表 3.2 は、それぞれ台湾とインドネシアの延長推計の結果を示している。いずれの表についても､左上に 2005 年の実際の国内投入係数（実現値）を掲載しており、続いて 4 種類の延長推計の結果を掲載している。また、RAS 法と平均増加倍率法（加法、乗法）に関しては、収束に要したイタレーション回数も表示した。一番下には実現値および他の延長推計値の間の乖離を、①類似度と②STPE（Standardized Total Percentage Error）の 2 つの指標により計測した結果を掲載している。2 つの指標の定義は以下のとおりである。

2 つの投入係数行列

$$\begin{bmatrix} a_{11}^r & a_{12}^r & \cdots & a_{1n}^r \\ a_{21}^r & a_{22}^r & \cdots & a_{2n}^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^r & a_{n2}^r & \cdots & a_{nn}^r \end{bmatrix} \quad \text{および} \quad \begin{bmatrix} a_{11}^s & a_{12}^s & \cdots & a_{1n}^s \\ a_{21}^s & a_{22}^s & \cdots & a_{2n}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^s & a_{n2}^s & \cdots & a_{nn}^s \end{bmatrix}$$

の類似度および STPE は次式により定義される。

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^r - a_{ij}^s\right)^2}{n^2}} \qquad \cdots \quad \text{類似度}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^r - a_{ij}^s\right|}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s} \cdot 100 \qquad \cdots \quad \text{STPE}$$

いずれの指標についても、値がゼロに近いほど 2 つの行列は類似していることを意味する。なお、STPE の行列は厳密には対称ではないが、現実には非常に対称行列に近いため左下半分のみを掲げた。また、実際にはこの 2 つの尺度は非常に高い相関を有しており、どちらか一方を参照すれば十分である。

表 3.1　延長推計法結果比較（台湾）

2005年の実現値

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.067	0.000	0.013	0.000	0.001	0.000	0.000
2	0.000	0.011	0.004	0.013	0.043	0.000	0.000
3	0.179	0.139	0.292	0.119	0.437	0.071	0.051
4	0.008	0.029	0.017	0.077	0.003	0.012	0.010
5	0.001	0.007	0.002	0.018	0.001	0.004	0.013
6	0.044	0.021	0.044	0.009	0.095	0.015	0.013
7	0.126	0.022	0.071	0.040	0.057	0.189	0.162

RAS法（列方向から調整開始：4回のイタレーション）

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.057	0.000	0.013	0.000	0.001	0.000	0.000
2	0.000	0.014	0.005	0.004	0.036	0.000	0.000
3	0.203	0.147	0.280	0.052	0.411	0.077	0.072
4	0.004	0.016	0.017	0.136	0.003	0.007	0.008
5	0.001	0.004	0.001	0.009	0.001	0.003	0.015
6	0.020	0.018	0.044	0.007	0.071	0.032	0.012
7	0.140	0.030	0.082	0.068	0.113	0.172	0.142

平均増加倍率表（加法：15回のイタレーション）

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.056	0.000	0.013	0.000	0.001	0.000	0.000
2	0.000	0.014	0.005	0.005	0.036	0.000	0.000
3	0.204	0.147	0.280	0.063	0.411	0.077	0.072
4	0.004	0.017	0.019	0.103	0.004	0.006	0.008
5	0.001	0.004	0.001	0.017	0.001	0.003	0.015
6	0.020	0.018	0.044	0.010	0.072	0.032	0.012
7	0.141	0.030	0.082	0.079	0.113	0.172	0.142

平均増加倍率法（乗法：14回のイタレーション）

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.057	0.000	0.013	0.000	0.001	0.000	0.000
2	0.000	0.014	0.005	0.004	0.036	0.000	0.000
3	0.203	0.147	0.280	0.052	0.411	0.077	0.071
4	0.004	0.016	0.017	0.136	0.003	0.007	0.008
5	0.001	0.004	0.001	0.009	0.001	0.003	0.015
6	0.020	0.018	0.044	0.007	0.071	0.032	0.012
7	0.140	0.030	0.082	0.068	0.114	0.173	0.142

ラグランジュ法

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.094	-0.002	0.010	0.035	0.008	0.006	-0.002
2	-0.012	0.012	0.000	0.036	0.038	0.008	0.003
3	0.206	0.148	0.290	0.042	0.371	0.069	0.065
4	-0.010	0.006	0.016	0.043	0.010	0.014	0.014
5	-0.010	0.013	-0.016	0.039	0.008	0.012	0.034
6	0.016	0.023	0.043	0.036	0.092	0.037	0.006
7	0.140	0.029	0.099	0.044	0.110	0.144	0.128

類似度

	実現値	RAS法	平均加	平均乗
RAS法	0.0187			
平均加	0.0166	0.0053		
平均乗	0.0187	0.0001	0.0053	
ラグランジュ法	0.0234	0.0202	0.0178	0.0202

STPE

	実現値	RAS法	平均加	平均乗
RAS法	20.5			
平均加	18.9	3.0		
平均乗	20.5	0.1	3.0	
ラグランジュ法	31.1	24.8	24.0	24.8

（出所）筆者作成。

（注）平均加：平均増加倍率法（加法）、平均乗：平均増加倍率法（乗法）

表 3.2　延長推計法結果比較（インドネシア）

2005年の実現値

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.101	0.000	0.094	0.000	0.016	0.000	0.040
2	0.000	0.133	0.040	0.141	0.053	0.000	0.001
3	0.089	0.034	0.206	0.236	0.296	0.151	0.128
4	0.001	0.001	0.012	0.152	0.000	0.016	0.008
5	0.008	0.009	0.001	0.010	0.001	0.017	0.022
6	0.034	0.013	0.071	0.046	0.099	0.063	0.053
7	0.015	0.010	0.035	0.030	0.057	0.121	0.104

RAS法（列方向から調整開始：6回のイタレーション）

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.067	0.000	0.107	0.000	0.019	0.001	0.029
2	0.000	0.142	0.032	0.364	0.042	0.000	0.001
3	0.111	0.023	0.205	0.075	0.309	0.131	0.145
4	0.000	0.000	0.012	0.112	0.001	0.019	0.009
5	0.010	0.012	0.001	0.012	0.001	0.018	0.020
6	0.028	0.008	0.078	0.026	0.086	0.049	0.063
7	0.031	0.013	0.025	0.025	0.065	0.150	0.090

平均増加倍率表（加法：19回のイタレーション）

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.067	0.000	0.107	0.000	0.019	0.001	0.029
2	0.000	0.142	0.032	0.370	0.043	0.000	0.001
3	0.111	0.023	0.207	0.073	0.306	0.130	0.144
4	0.000	0.000	0.012	0.109	0.001	0.019	0.009
5	0.010	0.012	0.001	0.012	0.001	0.018	0.020
6	0.028	0.008	0.077	0.027	0.088	0.050	0.063
7	0.031	0.013	0.025	0.024	0.065	0.150	0.090

平均増加倍率法（乗法：19回のイタレーション）

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.067	0.000	0.107	0.000	0.019	0.001	0.029
2	0.000	0.142	0.032	0.364	0.042	0.000	0.001
3	0.111	0.023	0.205	0.075	0.309	0.131	0.145
4	0.000	0.000	0.012	0.112	0.001	0.019	0.009
5	0.010	0.012	0.001	0.012	0.001	0.018	0.020
6	0.028	0.008	0.078	0.026	0.086	0.049	0.063
7	0.031	0.013	0.025	0.025	0.065	0.150	0.090

ラグランジュ法

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.067	0.000	0.106	-0.006	0.022	0.003	0.029
2	-0.001	0.148	0.027	0.457	0.059	-0.002	-0.007
3	0.102	0.026	0.223	0.050	0.262	0.126	0.145
4	0.004	0.002	0.009	0.072	0.007	0.021	0.011
5	0.012	0.010	-0.002	0.004	0.006	0.021	0.020
6	0.030	0.002	0.071	0.022	0.102	0.054	0.066
7	0.033	0.012	0.026	0.016	0.066	0.146	0.091

類似度

	実現値	RAS法	平均加	平均乗
RAS法	0.0411			
平均加	0.0420	0.0012		
平均乗	0.0412	0.0001	0.0012	
ラグランジュ法	0.0550	0.0173	0.0161	0.0173

STPE

	実現値	RAS法	平均加	平均乗
RAS法	28.0			
平均加	28.1	0.9		
平均乗	28.0	0.0	0.9	
ラグランジュ法	36.7	14.3	13.5	14.2

（出所）筆者作成。

（注）平均加：平均増加倍率法（加法）、平均乗：平均増加倍率法（乗法）

表 3.1 および表 3.2 から、以下の諸点を読み取ることができる。

① 実現値に最も近い延長推計値が得られるのは、台湾表の場合には平均増加倍率法（加法）であり、RAS 法と平均増加倍率法（乗法）がそれに次いでいる。また、インドネシア表では、RAS 法と平均増加倍率法（乗法）による推計結果が実現値に最も近く、平均増加倍率法（加法）の推計結果がこれに次いでいる。いずれの場合も、実現値に最も近い表を推計するのはイタレーションによる RAS 法、平均増加倍率法（加法）、平均増加倍率法（乗法）で、この 3 者による推計結果と実現値との類似度はほぼ等しい。台湾表とインドネシア表のいずれ

の場合も、ラグランジュ未定係数法による推計値が実現値より最も遠く離れていることがわかる。

② 台湾表およびインドネシア表のいずれについても、イタレーションによる 3 つの方法（RAS 法、平均増加倍率法（加法と乗法））により延長推計された投入係数を見ると、互いに非常に似ていることがわかる。特に、RAS 法と平均増加倍率法（乗法）の延長推計結果は極めて近い。インドネシア表の場合は、少数以下 3 桁の投入係数が完全に一致している（表 2）。台湾表の場合では異なっているのは 4 カ所のみである。

③ イタレーションによる 3 つの推計法の推計精度は、すべてほぼ同じと見なしても良いかも知れないが、大きな違いは収束速度である。台湾表でもインドネシア表でも RAS 法の収束速度が圧倒的に早い。平均増加倍率法の収束速度は加法と乗法ともほぼ同じである。以前は産業連関表の延長推計は大型コンピュータで行われるのが普通であったため、収束速度はさほど気にはされなかったが、最近ではパーソナル・コンピュータの発達により、表計算ソフトでも延長推計が可能になってきたため、延長推計法による収束速度の差は大きな意味を持ち、RAS 法が最も有利となろう。

④ イタレーションによる 3 つの推計法とも台湾表の方がインドネシア表より早く収束している。これは 2000 年から 2005 年への投入構造の変化がインドネシア表の方が台湾表より大きかったためである。現実の 2000 年から 2005 年の投入係数の変化を類似度で測ってみると、インドネシア表の類似度の方が台湾表のそれより大きくなっている（変化が大きい）。

⑤ 最も実現値から遠いのはラグランジュ未定係数法による延長推計結果であることは上で指摘したとおりであるが、ラグランジュ未定係数法の推計結果は、他の方法による推計結果とも比較的大きく異なっている。これは類似度および STPE からも確認できる。

⑥ ラグランジュ未定係数法には投入側と産出側の双方のバランスがとれた結果が得られるという大きな特徴がある。しかし、負の投入係数が得られるという問題点も残る。

総合的にみると、延長推計法としては RAS 法が最も優れているように思われる。また、ラグランジュ未定係数法では完全にバランスの取れた結果が得られることから、延長推計の最後の段階の表の微調整のために使用できると思われる。現実に日本表の延長推計では最後の調整を、（ここでの定式化とは異なるが）ラグランジュ未定係数法によって行っている（経産省［2013］では「未定乗数法」と呼んでいる）。

第 3 節　拡張 RAS 法

本節では、実際の一国産業連関表の延長推計の例として、アジア経済研究所で採用されてきた延長推計の手法を紹介する。それは RAS 法に基づいたもので、コンピュータ・プログラム「拡張 RAS 法」の中に体現されている。そこで、そのプログラムの機能を中心に紹介することにする。なお、本節は佐野［2011］の第 1 節を、本稿用に書き直したものである。

1. 機能の概要

このプログラムは、基準年の産業連関表の情報と対象年のコントロール・トータル等が与えられて、対象年の産業連関表を推計するものである。ここでいうコントロール・トータルとは、前の節でみた対象年の中間投入計や中間需要計のように、表全体がこのコントロール・トータルに整合的になるように調整される最も基本的な情報である。

このプログラムでは、コントロール・トータルとして対象年の部門別国内生産額（＝総投入＝総産出）、項目別最終需要合計、項目別付加価値合計などが与えられ、その他の部分は基準年のものが与えられる。調整法としては、コントロール・トータル以外の列方向の合計が与えられた列のコントロール・トータルに、またコントロール・トータル以外の行方向の合計が行のコントロール・トータルに、それぞれ一致するように、RAS 法によるイタレーションで調整される。

これが「拡張」RAS 法と呼ばれるのは、①RAS 法のアルゴリズムを使用していること、②中間取引部分のみならず、いわゆる外生部分（付加価値、最終需要など）を含めて調整の対象になっていること、③産業連関表中の特定のセルの値を固定できること、④産業連関表中の特定部分の合計値を固定できることによる。

③と④で固定された値は、毎回の RAS 法によるイタレーション（列方向への調整と行方向への調整）が済んだ後にセットし直される。

2. 産業連関表のフレームワーク

このプログラムが扱う産業連関表のフレームワークは表 3.3 のとおりである。基本的には非競争輸入型の形をしているが、競争輸入型の産業連関表も扱えるように柔軟性を持たせている。また、行部門にも列部門にも 4 桁のコードが与えられている。

まず、非競争輸入型表を想定して投入側からみていくと、行部門コードでみて、1001～1nnn（nnn：3 桁の内生部門数、例：180）が国産品中間投入であり、1900 が国産品

中間投入計である。続いて 2001～2nnn が輸入品中間投入であり、2900 が輸入品中間投入計である。その下にある 2901 には、2001～2nnn、2900 で示す輸入額に関税・輸入品商品税が含まれている場合はゼロが入り、含まれていない場合には、ここに関税・輸入品商品税を計上する。これは、後にこの表が国際産業連関表に組み込まれる場合を想定したものである。

続く 3001～3nva（nva：3 桁の付加価値項目数、例：004）は付加価値であり、多くの場合 3001：雇用者報酬、3002：営業余剰、3003：資本減耗引当、3004：間接税（控除．補助金）となる。3900 は付加価値計である。

表の最後はコントロール・トータルに関する項目である。6000 はコントロール・トータルそのものであり、部門別総投入、項目別国内最終需要計、輸出計、輸入計（競争輸入型表の場合）が入る。7000 は表から計算された合計で部門 1001～1nnn、部門 2001～2nnn、部門 2901、部門 3001～3nva の合計である。最後の 8000 は誤差で、部門 7000 から部門 6000 を引いた値である。

産出（需要）側をみると、1001～1nnn は中間需要であり、1900 が中間需要計である。また、4001～4nfd（nfd : 3 桁の国内最終需要項目数、例 : 004）は国内最終需要であり、多くの場合、4001 : 民間消費支出、4002 : 政府消費支出、4003 : 総固定資本形成、4004 : 在庫純増である。5001 は輸出で、5002 は競争輸入型表の場合には輸入（マイナスで与える）である。ただし、非競争輸入型表の場合は 5002 の列はゼロになる。

6000 以降は、ほぼ投入側で述べたコードと同じであり、6000 がコントロール・トータルで部門別総産出、部門別輸入計、関税・輸入品商品税計および項目別付加価値計からなる。また 7000 は計算による合計で、部門 1001～1nnn、部門 4001～4nfd、部門 5001、部門 5002 を足し上げたものである。最後の 8000 は部門 7000 から部門 6000 を引いたもので、足し上げによる合計とコントロール・トータルとの差、いわゆる誤差である。

競争輸入型表の場合は、行部門コード、1001～1nnn、1900 に国産品も輸入品も足し上げられ、列部門コード 5002 に部門別の輸入額がマイナスで入る。当然、行部門 2001～2nnn、2900 はゼロである。また、行部門 2901 もゼロになる。

表 3　産業連関表のフレームワーク

（投入側）

行部門コード	名　　称
1001 : 1nnn	国産品中間投入
1900	国産品中間投入計
2001 : 2nnn	輸入品中間投入
2900	輸入品中間投入計
2901	関税・輸入品商品税
3001 : 3nva	付加価値
3900	付加価値計
6000	CT
7000	計算による合計
8000	誤差

（産出側）

列部門コード	名　　称
1001 : 1nnn	中間需要
1900	中間需要計
4001 : 4nfd	国内最終需要
4900	国内最終需要計
5001	輸出
5002	輸入
6000	CT
7000	計算による合計
8000	誤差

（出所）佐野［2011］の別表 1 を修正して作成。
（注）nnn：内生部門数（3 桁の数字。例：089, 180）
nva：付加価値項目数（3 桁の数字。例：004, 005）
nfd：国内最終需要項目数（3 桁の数字。例：004, 005）
CT（＝コントロール・トータル）
行部門：部門別国内生産額、項目別国内最終需要計、輸出計、輸入計
列部門：部門別国内生産額、部門別輸入計、関税・輸入品商品税計、
項目別付加価値計
非競争輸入型表の場合：
・5002 列は全てゼロになる。
・輸入に関税・輸入品商品税が含まれていない場合に 2901 行に計上する。
競争輸入型表の場合：
・行部門 1001～1nnn、1900 行は輸入を含む。
・行部門 2001～2nnn、2900 行は全てゼロになる。
・5002 列に輸入が控除項目（マイナス値）として入る。

3. 入力ファイル

表 3.3 に掲げた産業連関表中の基準年の構造と対象年のコントロール・トータルは入力ファイルで与える。また、拡張 RAS 法によって固定されるセルの値、固定されるセルの集合とその固定値、RAS 法の制御情報も入力ファイルで与える。

(1) 基準年の産業連関表（プログラム内のファイル名：niofile）

基準年のコントロール・トータルを除く全てのセルの値をこのファイルで与える。つまり、次の範囲の情報である。

行：　1001～1nnn、2001～2nnn、2901、3001～3nva

列：　1001～1nnn、4001～4nfd、5001,5002

ただし、合計項目（行：1900、2900、3900、列：1900、4900）は、与えても無視される。

このファイルは固定長で、レコード項目は、①行部門コード、②列部門コード、③金額である。ただし、金額がゼロの場合はそのレコードを与える必要がない。

(2) 対象年のコントロール・トータル（ctfile）

対象年のコントロール・トータルとして与える必要があるのは次のものである。ただし、(　) 内のカンマの左は行部門コード、右は列部門コードである。

- 内生部門別総投入（6000、1001～1nnn）
- 内生部門総産出（1001～1nnn、6000）
- 項目別付加価値計（3001～3nva、6000）
- 項目別国内最終需要計（6000、4001～4nfd）
- 行部門別輸入計［非競争輸入型表の場合］（2001～2nnn、6000）
- 関税・輸入品商品税計（2901、6000）
- 輸出計（6000、5001）
- 輸入計［競争輸入表の場合］（6000、5002）

このファイルは固定長で、レコード項目は、①行部門コード、②列部門コード、③金額である。ただし、金額がゼロの場合はそのレコードを与える必要がない。

(3) 追加調整情報（adjfile）

このファイルは拡張 RAS 法に特徴的なものであり、産業連関表のコントロール・トータルを除く特定部分の合計を強制的に指定された値に固定したい場合、このファイ

ルでその部分と固定する値を与える。ここで「特定部分」はひとつのセルの場合もあり得る。また、ここでいう指定する固定値は当然対象年のものである。

このファイルは固定長で、以下の情報を与える。

① 続き記号
② 矩形の上端行部門コード
③ 矩形の下端行部門コード（もし、ブランクなら上と同じと見なされる。）
④ 矩形の左端列部門コード
⑤ 矩形の右端列部門コード（もし、ブランクなら上と同じと見なされる。）
⑥ 固定する値（続き記号がブランクの場合）

追加調整情報は産業連関表のコントロール・トータル以外の特定部分の合計を固定したい場合に与えるが、まず、その部分を幾つかの重複のない矩形に分解し、各矩形の上端と下端を行部門コードで左端と右端を列部門コードで示す。

産業連関表の特定部分が、重複のない A, B, C の 3 つの矩形に分解されたとすると、次のようになる。

＜1 番目のレコード＞
- 「続き記号」はブランクにする。
- 矩形 A の上端と下端を行部門コードで、左端と右端を列部門コードで与える。
- 「固定する値」合計値を与える。

＜2 番目のレコード＞
- 「続き記号」はブランク以外の文字にする。
- 矩形 B の上端と下端を行部門コードで、左端と右端を列部門コードで与える。
- 「固定する値」はブランクにする。

＜3 番目のレコード＞
- 「続き記号」はブランク以外の文字にする。
- 矩形 C の上端と下端を行部門コードで、左端と右端を列部門コードで与える。
- 「固定する値」はブランクにする。

（例）
- 第 2 部門から第 6 部門と、第 9 部門から第 11 部門の付加価値合計を 1234 に固定する（付加価値は 4 項目からなるとする）。

- 第 4 部門から第 9 部門輸出合計を 5678 に固定する。

```
  3001 3004 1002 1006     1234
+ 3001 3004 1009 1011
  1004 1009 5001          5678
```

なお、産業連関表の固定したい部分が 1 つのセルのみから成り立っている場合は、そのセルの値は「固定する値」に置き換えられる。固定したい部分が複数のセルからなり、しかも元のその部分の合計値が 0 の場合は、「固定する値」は無視され、その部分は調整されないで、0 のままになる。

(4) その他の入力ファイル（sysin）

産業連関表のフレームワークに関する情報と RAS 法の制御情報を与える。それらは、①内生部門数（nnn）、②付加価値項目数（nva）、③国内最終需要項目数（nfd）、④RAS 法の最大繰り返し回数（イタレーション回数がこの値に達したらイタレーションは終了し、拡張 RAS 法は収束しなかったと判定される）、⑤RAS 法の収束条件（全ての行修正係数と列修正係数の 1 との差がここで与えた値より小さくなったら、イタレーションは終了し、拡張 RAS 法は収束したものと判定される）である。

4. 出力ファイル

拡張 RAS 法の計算結果は 2 種類のファイルに出力される。これらは、拡張 RAS 法の収束の如何に関わらず出力され、これらのファイルの中の合計項目と誤差は再計算されている。また、入力データに誤りがあったときの警告と、拡張 RAS 法の収束情報が収められたファイルが出力される。

(1) 対象年の延長産業連関表（outfile）

対象年の延長産業連関表が、表 3.3 のフレームワークに従って出力される。このファイルは固定長で、出力されるレコード項目は①行部門コード、②列部門コード、③金額である（niofile と同じ）。ただし、金額が 0 のレコードは出力されない。

(2) 対象年の延長産業連関表－エクセル・フォーム（excelfl）

対象年の延長産業連関表が表イメージで出力される。これは後ほど、エクセルで直接読み込んで、エクセルでこの表を利用することを想定している。

(3) エラー・メッセージと RAS 法の収束情報（sysprint）

入力ファイルのレコードにエラーがあったときにはエラー・メッセージが出力される。また、RAS 法の収束情報がイタレーションの度に出力される。

おわりに

本稿では、一国の産業連関表の延長推計作業に関する技術的な側面を考察した。

第 1 節では、産業連関表の延長推計で必要となる作業と手順について確認した。まず、最も網羅的な作業が行われていると考えられる日本産業連関表の延長推計作業において行われている作業と手順を確認した。次いで 2005 年産業連関表の延長推計作業において、中国、台湾、シンガポールにおいてなされた国内生産額の推計、輸出入額の推計、国内最終需要額の推計、付加価値額の推計、中間取引額の推計において、何がどのように推計されたのかを確認した。各国の作業の中では多くの資料が参照され、延長推計が行われているが、その資料の中身の点検まではできなかった。その使用された資料を実際に検討することで、各国の延長推計作業に関する理解がさらに深まるのではないかと思われる。今後の課題としたい。

第 2 節では、中間取引部分の延長推計法について検討した。ここが延長推計作業の中で最も困難な部分と思われるが、幾つかの機械的な方法が提案されているため、それらの方法について紹介を行った。RAS 法では行修正係数による各行の調整と列修正係数による各列の調整が交互に繰り返しながら（イタレーション)、行方向と列方向のいずれについてもバランスの取れた中間取引部分が探索される。また、平均増加倍率法では､RAS 法と同様に行修正係数による調整と列修正係数による調整が行われるが、それが同時に行われ、その平均（加法の場合は算術平均、乗法の場合は幾何平均）をとることを繰り返しながら、行方向と列方向の両方についてバランスのとれた中間取引部分が探索される。それに対し、ラグランジュ未定係数法はイタレーションによらず、数学的なある意味の最適解を求める方法である。

これらの方法のパフォーマンスを比較してみると、イタレーションによる 3 つの方法から得られる結果は非常に近いものである。しかし、収束の早さまで考慮すると、従来から最も広く使用されている RAS 法が最も良好なパフォーマンスを示していると思われる。ラグランジュ未定係数法の最大の特徴は、確実にバランスのとれた結果が得られることであるが、実現値からは遠い結果が得られ、パフォーマンスには問題があるといえよう。

最後に、第 3 節では、アジア経済研究所で従来から使用されている拡張 RAS 法を、延長推計法の実際の適用例として紹介した。これはコンピュータ・プログラムに体現

されているので、そのプログラムの機能を中心に説明した。これが「拡張」RAS 法と呼ばれるのは、①中間取引のみならず最終需要、付加価値なども対象に含むこと、②産業連関表中のある部分（ひとつのセルでも良い）の合計値を特定の値に固定できること、③通常の RAS 法としても使用できることによる。この拡張 RAS 法についても、第 2 節で行ったような何らかのパフォーマンス比較が可能と考えられるため、これも今後の課題としたい。

〔参照文献〕

＜日本語文献＞
金子敬生［1977］『新版・産業連関の理論と適用』日本評論社、1977 年 7 月。
経済産業省大臣官房調査統計グループ［2013］「延長産業連関表からみた我が国経済構造の概要（平成 23 年簡易延長産業連関表、平成 22 年延長産業連関表）」2013 年 3 月。
佐野敬夫［2011］「国際産業連関表作成のための情報システム」（猪俣哲史・桑森啓・玉村千治編『2005 年国際産業連関表の作成と利用（Ⅱ）』アジア国際産業連関シリーズ No.77、日本貿易振興機構アジア経済研究所、2011 年 3 月、第 4 章、pp. 95-130 所収）。
横橋正利［2005］「米国 2000 年表の推計方法の概要」（岡本信広・猪俣哲史編『国際産業連関－アジア諸国の産業連関構造－（Ⅳ）』アジア国際産業連関シリーズ No.65、アジア経済研究所、2005 年 3 月、第 8 章、pp. 93-116 所収）。

＜外国語文献＞
Institute of Developing Economies, Japan External Trade Organization (IDE-JETRO)［2006］, *Asian International Input-Output Table 2000: Data*, I.D.E. Statistical Data Series, No. 90, IDE-JETRO, Chiba, March 2006.
――――――［2012］, *Asian International Input-Output Table 2005: Explanatory Notes*, Asian International Input-Output Series, No. 78, IDE-JETRO, Chiba, March 2012.
――――――［2013］, *Asian International Input-Output Table 2005*, I.D.E. Statistical Data Series, No. 98, IDE-JETRO, Chiba, November 2013.

[1] しかし、これはサービスの輸出入データではないかと思われる。